Cidália Margarida Machado Tomás

Licenciada em Matemática

Intervalos de confiança para rendas vitalícias: aplicação a fundos de pensões

Dissertação para obtenção do Grau de

Mestre em Matemática e Aplicações

Ramo de Atuariado, Estatística e Investigação Operacional

Orientadores: Lourdes Belchior Afonso,
Professora Auxiliar, FCT-UNL
Pedro Alexandre da Rosa Corte Real,
Professor Auxiliar, FCT-UNL

Júri:

Presidente: Manuel Leote Tavares Inglês Esquível

Arguentes: Gracinda Rita Diogo Guerreiro

Vogal(ais): Lourdes Belchior Afonso

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro, 2015

Intervalos de confiança para rendas vitalícias: aplicação a fundos de pensões

Aos meus pais e irmã

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar aos meus orientadores, Profª Drª Lourdes Belchior Afonso e ao Prof. Dr. Pedro Alexandre Corte Real, pelo acompanhamento concedido durante a elaboração desta dissertação. Agradeço ainda à Profª Drª Lourdes Afonso pelo aconselhamento, partilha de ideias e incentivo demonstrados ao longo deste projeto.

Agradeço também a todos os familiares, amigos e colegas por todo o apoio, ânimo e interesse demonstrados, levando a que eu conseguisse alcançar este objetivo.

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo estabelecer intervalos de confiança para rendas vitalícias, que podem vir a ser aplicados no cálculo de responsabilidades atuariais. Para este efeito, foi necessário fazer uma revisão sobre conceitos de mortalidade, tempo de vida futura e rendas vitalícias.

Posteriormente, serão apresentadas relações entre rendas vitalícias e variáveis aleatórias, que dependem da aleatoriedade do tempo de vida futura. De seguida, serão obtidos os intervalos de confiança para as rendas vitalícias considerando o Teorema Limite Central de Lyapunov, e será elaborada uma revisão de alguns conceitos sobre fundos de pensões para enquadramento da aplicação prática.

Por último, será efetuada uma aplicação prática das metodologias desenvolvidas ao longo da dissertação, onde serão apresentados intervalos de confiança para o cálculo das responsabilidades de um plano de pensões. A construção de intervalos de confiança para as responsabilidades atuariais, custo normal ou mesmo valor atual dos benefícios totais traduz-se numa mais-valia para a gestão de um fundo. Por vezes a estimação pontual de um parâmetro não fornece informação suficiente sobre esse mesmo parâmetro, é importante questionarmo-nos sobre a proximidade dessa estimativa ao seu verdadeiro valor.

Palavras-chave: responsabilidades atuariais, intervalos de confiança, rendas vitalícias, fundo de pensões, plano de pensões.

Abstract

The goal of this dissertation is to establish confidence intervals for life annuities, that can be applied in the calculation of actuarial liabilities, normal cost, plan termination liability or plan continuation liability. For this purpose, it was “necessary” to remember some concepts regarding mortality, future lifetime and life annuities.

Afterwards, will be presented some relations between life annuities and random variables that depend of random future lifetime. The confidence intervals are obtained using the Central Limit Theorem by Lyapunov.

Finally, a practical application will be implemented using the developed methodologies. First, we will review some concepts about pension funds and then we will obtain confidence intervals for actuarial liabilities of a particular pension fund. Confidence intervals for liabilities could be an advantage for fund management. Sometimes a point estimate of a parameter does not provide enough information about it, it is important to understand how far we can be from its true value.

Keywords: actuarial liabilities, confidence intervals, life annuities, pension fund, pension plan.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Siglas e Acrónimos

F	Valor do fundo
$i.i.d$	Independentes e identicamente distribuídas
IC	Intervalo de confiança
INR	Idade normal de reforma
R	Nível de financiamento do fundo
RSPNA	Responsabilidades por serviços passados não amortizada
TLC	Teorema Limite Central
TSF	Tempo de serviço futuro
TSP	Tempo de serviço passado
u.m.	Unidade monetária
v.a.	Variável aleatória
VABT	Valor atuarial dos benefícios totais
VAPP	Valor atuarial das pensões em pagamento
VARSF	Valor atuarial das responsabilidades com serviços futuros
VARSP	Valor atuarial das responsabilidades com serviços passados

1 Introdução

O sistema de previdência social público no nosso país tem vindo a enfrentar dificuldades, o que leva a que os cidadãos não estejam seguros de que irão receber uma pensão digna quando chegarem à reforma. Neste enquadramento, tem-se evidenciado cada vez mais uma crescente procura por sistemas de previdência privados. Algumas empresas dos setores mais dinâmicos da economia, com o objetivo de beneficiar e premiar os seus colaboradores têm vindo a contemplá-los com a adesão a um fundo de pensões.

O objetivo fundamental que se pretende alcançar com o desenvolvimento de fundos de pensões é o de garantir uma reforma aos cidadãos, contribuindo desta forma para evitar a crise social e económica decorrente do envelhecimento da população. Ao mesmo tempo, a aplicação do capital do fundo irá contribuir para o crescimento económico, entre outros fatores impulsionadores da economia.

Para que os fundos de pensões não incorram em incumprimento relativamente às garantias oferecidas, deve ser feita uma gestão e acompanhamento do fundo. O atuário tem um papel fundamental neste processo, e quantas mais ferramentas de análise possuir, melhor será a gestão do fundo. Esta dissertação visa, para esse efeito, estabelecer intervalos de confiança para o valor atual de rendas vitalícias, pois estas são frequentemente usadas em cálculos atuariais que procuram medir responsabilidades, como é o caso das avaliações atuariais de responsabilidades de planos de pensões.

Para o desenvolvimento destas novas metodologias, será necessário considerar em primeiro lugar uma revisão sobre conceitos de mortalidade, tempo de vida futura e rendas vitalícias. Após a revisão dos conceitos referidos, serão apresentadas relações entre rendas vitalícias e variáveis aleatórias, que dependem da aleatoriedade do tempo de vida futura. Em seguida, considerando o Teorema Limite Central de Lyapunov serão obtidos os intervalos de confiança para o valor atual das rendas vitalícias e será elaborada uma revisão de alguns conceitos sobre fundos de pensões que servirá de enquadramento à aplicação prática que a seguir se desenvolverá.

Na última secção será efetuada uma aplicação prática das metodologias desenvolvidas no caso da avaliação das responsabilidades de um plano de pensões fictício de benefício definido, considerando uma dada população real. A construção de intervalos de confiança para as responsabilidades atuariais, custo normal ou mesmo para o valor atual dos benefícios totais traduz-se em mais uma ferramenta de apoio à gestão de um fundo. A estimação pontual das responsabilidades é dos métodos mais utilizados, mas pode não fornecer informação suficiente sobre a proximidade dessa estimativa ao seu verdadeiro valor. Será esta a nova informação que os intervalos de confiança irão fornecer.

2 Mortalidade

O comportamento da mortalidade já é desde há muito objeto de estudo e análise estatística, ao qual se têm dedicado muitos matemáticos ilustres.

Apesar de tudo, mesmo os estudos mais avançados não permitem incluir *a priori* as vicissitudes da vida de um cidadão, como são a doença, o acidente e mesmo a morte. Seria aliás impensável medir com exatidão a sobrevivência de um indivíduo. No entanto, o que se torna realmente importante é conhecer o padrão de comportamento da mortalidade de uma dada população onde esse indivíduo se insere.

Este capítulo consiste na apresentação de noções básicas sobre a mensuração da mortalidade, a construção de uma tábua de mortalidade e as funções tradicionais aplicáveis, bem como a notação atuarial que será importante ter presente.

2.1 Tempo de Vida Futura

Considere-se (x) um indivíduo com idade x e denote-se por $T(x)$, ou simplesmente T, o tempo de vida futura de (x), ou seja, $x + T$ será a idade de morte do indivíduo (x).

O tempo de vida futura, T, é uma variável aleatória com função de distribuição

$$G(t) = \Pr(T \leq t)\,, t \geq 0\,. \tag{2.1}$$

A função $G(t)$ representa a probabilidade de (x) falecer no decorrer dos próximos t anos. Assumindo que $G(t)$ é conhecida, contínua e diferenciável, então teremos como função densidade $g(t) = G'(t)$.

Pode então escrever-se,

$$g(t)\;dt \approx \Pr(t < T < t + dt) \tag{2.2}$$

como sendo a probabilidade de (x) falecer entre a idade $x + t$ e $x + t + dt$.

O símbolo ${}_tq_x$ representa a probabilidade de (x) morrer nos próximos t anos e ${}_tp_x$ denota a probabilidade de (x) estar vivo daqui a t anos, ou seja, sobreviver, pelo menos, aos próximos t anos.

Têm-se então as relações,

$$ {}_tq_x = G(t) \tag{2.3} $$

e,

$$ {}_tp_x = 1 - G(t). \tag{2.4} $$

Para $t = 1$ o índice é usualmente omitido. Portanto, q_x é a probabilidade de um indivíduo de idade x morrer dentro de um ano. A q_x dá-se o nome de taxa de mortalidade.

Tem-se também que

$$ {}_tp_x + {}_tq_x = 1 - G(t) + G(t) = 1. \tag{2.5} $$

2.2 Força da Mortalidade

A força de mortalidade de (x), à idade $x + t$, é definida por

$$ \mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt}\ln[1 - G(t)]\,. \tag{2.6} $$

Pode-se, utilizando as equações (2.2) e (2.4), chegar a uma outra expressão para a probabilidade de (x) morrer no intervalo entre t e $t + dt$:

$$ \Pr(t < T < t + dt) \approx {}_tp_x\,\mu_{x+t}dt\,. \tag{2.7} $$

2.3 Tempo de Vida Futura em anos completos

Denote-se agora por $K = [T]$, o tempo de vida futura em anos completos de (x). A função de distribuição da variável aleatória K é dada por

$$ \Pr(K = k) = \Pr(k \le T < k + 1) = {}_kp_x\,q_{x+k} \tag{2.8} $$

para $k = 0,1,2, \ldots$.

O valor esperado de K é denominado por esperança de vida incompleta de (x) e denotado por e_x. Assim,

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(K = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \ {}_{k}p_x \ q_{x+k} \tag{2.9}$$

ou

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(K = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\big(G(k+1) - G(k)\big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k([1 - G(k)] - [1 - G(k+1)]) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 - G(k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_{k}p_x \tag{2.10}$$

2.4 Tábuas de Mortalidade

As tábuas de mortalidade, também designadas como tábuas atuariais ou tábuas de sobrevivência, mostram de que forma a mortalidade atinge cada um dos escalões etários de uma dada população. As tábuas de mortalidade mais comuns são aquelas que dizem respeito à população residente num dado território nacional. Embora exista uma lei de sobrevivência afecta a cada tábua, essa lei usualmente não é do conhecimento geral. A tábua é, usualmente, apresentada recorrendo a uma de duas funções, o l_x ou o q_x. A primeira função indica o número de sobreviventes à idade x, ou seja o número de pessoas que alcançam com vida a idade x de uma geração inicial de l_0 nascimentos se sujeita às probabilidades de morte da tabela no decorrer da sua vida. A segunda função indica a probabilidade de morte de um indivíduo de idade x vir a morrer antes de completar a idade $x + 1$. As duas funções estão relacionadas da forma $q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$, pelo que partindo da raíz da tábua, com l_0 arbitrário e os q_x se chega aos l_x .

Apresenta-se a Tabela 2.1 um excerto de uma tábua de mortalidade usualmente utilizada em Portugal, a TV88/90, apresentam-se também gráficos ilustrativos de algumas funções básicas de mortalidade.

Tabela 2.1 - Excerto da tábua de mortalidade TV88/90

x	l_x
0	100000
1	99352
2	99294
3	99261
4	99236
…	…
50	95752
51	95488
52	95202
53	94892
…	…
108	14
109	6
110	2

As tábuas de mortalidade apresentam valores de l_x até à idade ω, idade limite da tábua, para além da qual não se considera possível sobreviver.

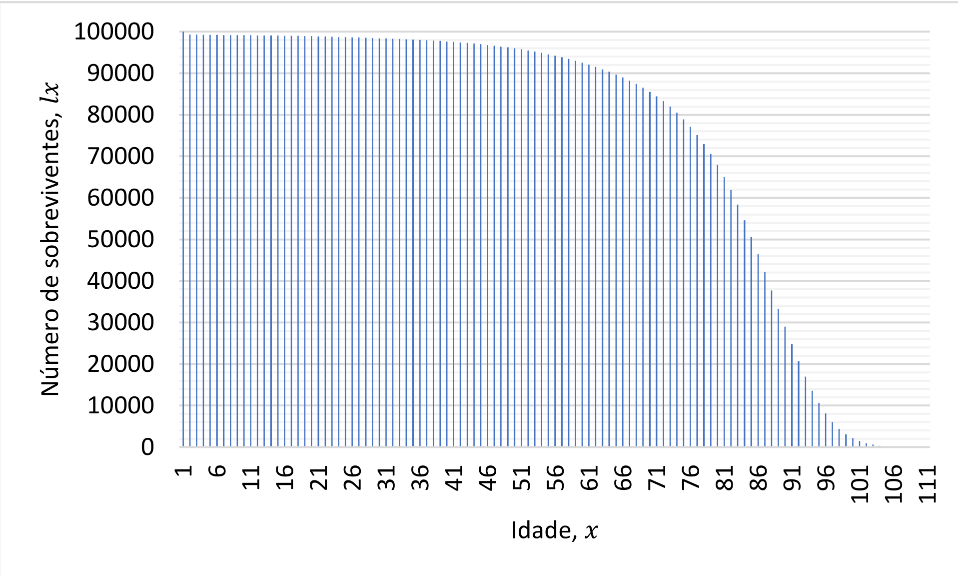

Figura 2.1 - Número de indivíduos vivos com idade x

Denota-se por d_x o número esperado de indivíduos que faleceram entre a idade x e $x + 1$, portanto $d_x = l_x - l_{x+1}$.

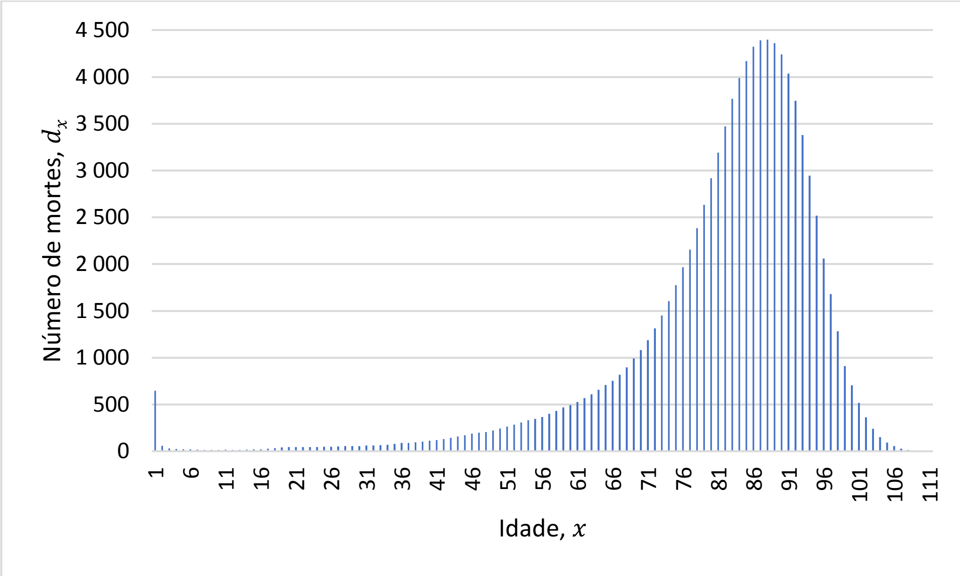

Figura 2.2 - Número de mortes com a idade x

Na figura seguinte está representada a evolução da taxa de mortalidade $q_x = \frac{d_x}{l_x}$.

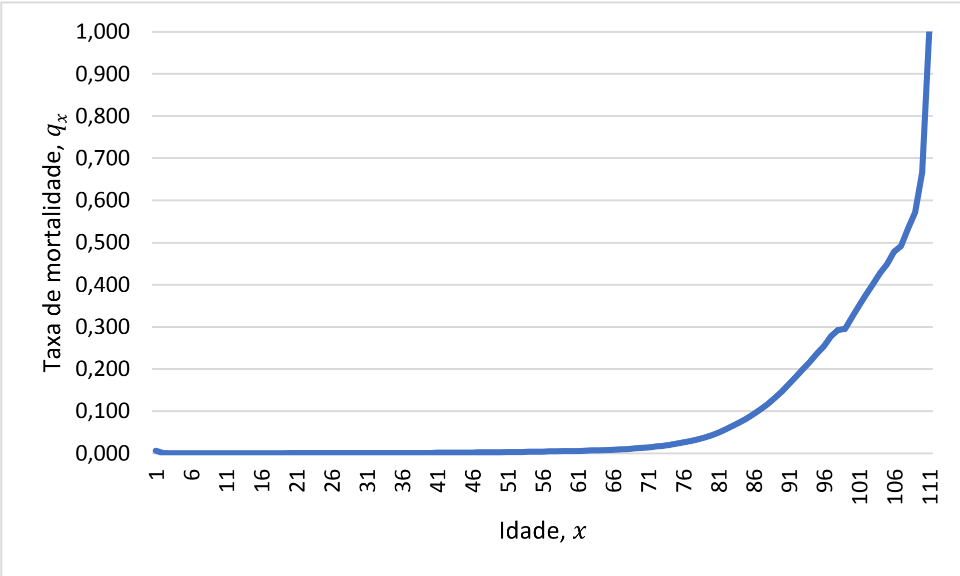

Figura 2.3 - Taxa de mortalidade

Em Quelhas (2010) são indicadas algumas das tábuas de mortalidade mais utilizadas no sector financeiro, tanto em termos nacionais como internacionais. Estão entre os vários exemplos as tábuas TV 73/77, TD 73/77, TV 88/90 e TD 88/90 que foram construídas de acordo com os parâmetros demográficos de França. Estas tábuas foram construídas tendo por base a informação estatística referente a vários anos, sendo que as tábuas baseadas apenas num ano podem dar azo a refletir anomalias nos níveis de mortalidade decorrentes de acontecimentos atípicos ocorridos nesse ano.

3 Rendas certas e vitalícias

Em consequência da crise generalizada que se tem sentido nos sistemas de Segurança Social, ganha terreno a procura de esquemas privados de previdência, os quais proporcionam, ao seu detentor, uma sequência de benefícios futuros, caso este se encontre vivo para os poder usufruir. Esta sequência de benefícios constitui uma renda incerta, por ser desconhecido o número de termos que serão pagos, que estão sujeitos à longevidade do beneficiário. A este género de rendas dá-se o nome de rendas vitalícias.

Mais à frente veremos que o valor atual de uma renda vitalícia pode ser encarado como o valor esperado de uma variável aleatória que depende do tempo de vida futura. Contudo, para isso será necessário usar alguns resultados e notação respeitantes a rendas certas, onde não existe incerteza quanto ao número de termos. Dessa forma, usando como referência Afonso e Cardoso, (2013), será apresentada, em seguida, uma breve revisão das rendas certas.

3.1 Rendas certas

Considere-se i uma taxa de capitalização, isto é, i representa o acréscimo sofrido por uma unidade de capital, investida durante uma unidade de tempo. O desconto, ou atualização, corresponde ao fenómeno inverso da capitalização e portanto, a taxa de desconto, denominada por d corresponde à redução sofrida por uma unidade de capital, descontada durante uma unidade de tempo. Ambas as taxas medem o mesmo fenómeno: o juro. Estas taxas relacionam-se através de:

$$(1+i)^{-1} = 1 - d \Leftrightarrow d = \frac{i}{1+i}.$$

Denomina-se v por fator de atualização, isto é $v = \frac{1}{1+i}$.

Uma renda certa é definida por uma sequência de n pagamentos.

O valor atual de uma renda de 1 u.m. paga durante n anos de forma antecipada, ou seja em que o vencimento do pagamento ocorre no início do período, é denotado por $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ e dado por

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} \tag{3.1}$$

Analogamente,

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \cdots + v^n = \ddot{a}_n - 1 + v^n = \frac{1 - v^n}{i} \tag{3.2}$$

denota o valor atual de uma renda de 1 u.m. paga durante n anos de forma postecipada, ou seja, em que o vencimento do pagamento ocorre no final do período.

O valor atual de uma renda fracionada paga de forma antecipada, em que é paga 1 u.m. durante m vezes ao ano, é denotado por $\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)}$ e dado por

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} = 1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}} = \frac{1 - v^n}{1 - (1 - d)^{\frac{1}{m}}} \tag{3.3}$$

De forma análoga, o valor atual de uma renda fracionada paga de forma postecipada é denotado por $a_{\overline{n|}}^{(m)}$ e dado por

$$a_{\overline{n|}}^{(m)} = v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}} + v^n = \frac{1 - v^n}{(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1} \tag{3.4}$$

3.2 Rendas vitalícias

Uma renda vitalícia pode ser classificada atendendo a vários critérios, como a sua duração, o valor dos termos, o momento de vencimento dos mesmos e quanto ao período da renda.

3.2.1 Rendas de vida inteira de termos constantes

As rendas vitalícias podem ser de vida inteira, nas quais o vencimento dos termos finda aquando da morte do beneficiário, ou seja, a série de pagamentos equidistantes é paga enquanto o beneficiário for vivo. Consideremos, agora, que esses pagamentos são constantes.

3.2.1.1 Renda vitalícia postecipada

Diz-se que uma renda é postecipada quando os termos vencem no final do período de tempo. O diagrama seguinte ajuda a compreender os referentes termos pagos e respetivo vencimento, em caso de vida do beneficiário

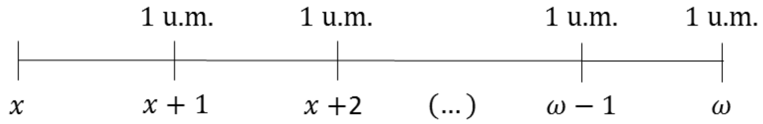

Figura 3.1 Diagrama dos termos de uma renda vitalícia inteira imediata postecipada

O valor atuarial desta renda, designado por a_x, corresponderá à soma dos valores atuariais de cada um dos termos da renda, ou seja

$$a_x = v\, p_x + v^2\, {}_2p_x + v^3\, {}_3p_x + \cdots + v^{\omega-x}\, {}_{\omega-x}p_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k\, {}_kp_x\,. \tag{3.5}$$

3.2.1.2 Renda vitalícia antecipada

Neste caso, o primeiro pagamento é realizado logo no momento de aquisição da renda, portanto vigora desde o momento atual até ao momento da morte de (x).

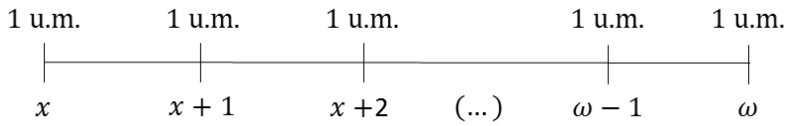

Figura 3.2 - Diagrama dos termos de uma renda vitalícia inteira imediata antecipada

Designado por $\ddot{a}_x$, o valor atuarial desta renda é então

$$\ddot{a}_x = 1 + v\, p_x + v^2\, {}_2p_x + v^3\, {}_3p_x + \cdots + v^{\omega-x}\, {}_{\omega-x}p_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k\, {}_kp_x. \tag{3.6}$$

Verificando-se então que

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x\,. \tag{3.7}$$

Como foi referido no início deste capítulo, o valor atual da renda pode também ser encarado como o valor esperado de uma variável aleatória que depende do tempo de vida futura.

Defina-se a variável aleatória Y como o valor atual de uma sucessão de k pagamentos efetuados em momentos equidistantes no tempo, com K a v.a. definida em (2.8):

$$Y = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1|}}\,. \tag{3.8}$$

A v.a. Y representa, assim, o valor atual de uma renda certa, em que o número de termos da renda é incerto e dependente da mortalidade de (x). A sua função probabilidade é dada por

$$\Pr\left(Y = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right) = \Pr(K = k) = \ {}_{k}p_x \ q_{x+k} \ , \ \ k \in \mathbb{N}_0 \ . \tag{3.9}$$

Assim, a renda $\ddot{a}_x$ corresponderá ao valor esperado da v.a. Y. Com efeito,

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \ {}_{k}p_x \ q_{x+k} \ . \tag{3.10}$$

A variável aleatória Y também pode ser expressa da forma

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ I_{\{K \geq k\}} \tag{3.11}$$

com I a função indicatriz.

Desta forma, encontramos de novo uma expressão para $\ddot{a}_x$, ou seja,

$$\ddot{a}_x = E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ E\left[I_{\{K \geq k\}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ P(K \geq k) \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ {}_{k}p_x \tag{3.12}$$

que coincide com a expressão (3.6) apresentada anteriormente.

3.2.2 Rendas vitalícias de termos variáveis em progressão geométrica

Considere-se agora que os termos da renda vitalícia variam em progressão geométrica, cujo primeiro termo é 1 u.m. e a taxa de crescimento é θ.

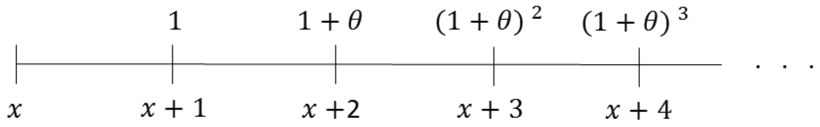

Figura 3.3 - Diagrama dos termos de uma renda vitalícia crescente em progressão geométrica de razão $(1 + \theta)$ imediata postecipada

O valor atuarial de uma renda vitalícia imediata e postecipada crescente em progressão geométrica de razão $(1 + \theta)$ é dado por:

$$(Ga)_x^\theta = v\, p_x + (1+\theta)\, v^2\ {}_2p_x + (1+\theta)^2 v^3\ {}_3p_x + \cdots$$
$$+ (1+\theta)^{\omega-x-1} v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x}p_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} (1+\theta)^{k-1} v^k\ {}_kp_x\,. \qquad (3.13)$$

Usando o mesmo raciocínio, para a renda antecipada tem-se

$$(G\ddot{a})_x^\theta = 1 + (1+\theta)\, v\, p_x + (1+\theta)^2\, v^2\ {}_2p_x + (1+\theta)^3 v^3\ {}_3p_x + \cdots$$
$$+ (1+\theta)^{\omega-x} v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x}p_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} (1+\theta)^{k} v^k\ {}_kp_x\,. \qquad (3.14)$$

4 Formulação probabilística para rendas vitalícias

Neste capítulo pretende-se dar a conhecer de que forma as rendas vitalícias podem estar relacionadas com variáveis aleatórias. Será em primeiro lugar apresentado o seguro de vida inteira que, de forma baseada na ideia de Gerber (1997), apresentará a relação que servirá de alavanca para o entendimento das relações apresentadas no decorrer do capítulo.

O seguro de vida, tradicionalmente, é um seguro através do qual o prestador do seguro se compromete a pagar, de imediato, aos beneficiários, um dado capital, em caso de morte da pessoa segura. Portanto, como se verifica, um seguro de vida com estas características trata-se de um seguro em caso de morte.

4.1 Seguro de vida inteira

O seguro de vida inteira é uma modalidade de seguro que obriga ao pagamento de um determinado capital em caso de morte do indivíduo seguro. Por simplificação, considere-se então um seguro de vida inteira emitido sobre um indivíduo de idade x, um capital seguro de 1 unidade monetária, e que o seu pagamento a efetuar, ocorrerá no final do ano em que a morte ocorre.

Nesta formulação, o capital seguro é fixo, ao invés do momento de pagamento, $(K+1)$, que é aleatório. Assim, se (x) falecer, o valor atual da indemnização a efetuar será

$$Z = v^{K+1} \tag{4.1}$$

com K a v.a. definida na secção 2.3 .

A variável aleatória Z pode assumir os valores v, v^2, v^3, …, e a sua função probabilidade será determinada pela função probabilidade da variável aleatória K expressa em (2.8),

$$\Pr\left(Z = v^{k+1}\right) = \Pr(K = k) = \ {}_k p_x \, q_{x+k} \ , k \in \mathbb{N}_0 \, . \tag{4.2}$$

Assim, o prémio único para esta modalidade de seguro, denotado por A_x é dado por

$$A_x = E[Z] = E[v^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_k p_x \ q_{x+k} \ . \tag{4.3}$$

Tendo-se também que,

$$E(Z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (v^2)^{k+1} \ {}_k p_x \ q_{x+k} \ . \tag{4.4}$$

Desta forma, a variância de Z pode ser calculada como:

$$Var(Z) = E(Z^2) - A_x^2 \ . \tag{4.5}$$

4.2 Formulação probabilística para a renda antecipada de termos constantes

Como já visto no capítulo anterior, consideremos de novo a variável aleatória Y definida por

$$Y = 1 + v + v^2 + \cdots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1|}} \ . \tag{4.6}$$

Tem-se então que,

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \frac{1 - v^{K+1}}{1 - v} = \frac{1 - Z}{1 - v} . \tag{4.7}$$

Assim, utilizando (4.3), pode deduzir-se o valor esperado de Y. Com efeito,

$$E(Y) = E\left(\frac{1 - Z}{1 - v}\right) = \frac{1 - E(Z)}{1 - v} = \frac{1 - A_x}{1 - v} = \ddot{a}_x \tag{4.8}$$

e,

$$V(Y) = \frac{1}{(1 - v)^2} \ V(Z) \ . \tag{4.9}$$

4.3 Formulação probabilística para a renda postecipada de termos constantes

Basta redefinir a variável Y para que cheguemos a outros resultados. Para este caso, considere-se Y como sendo,

$$Y = v + v^2 + \cdots + v^K = a_{\overline{K|}} = \ddot{a}_{\overline{K+1|}} - 1\,. \tag{4.10}$$

Assim, o valor esperado de Y será agora

$$E(Y) = E\left(\frac{1-Z}{1-v} - 1\right) = \frac{1-E(Z)}{1-v} - 1 = \frac{1-A_x}{1-v} - 1 = \ddot{a}_x - 1 = a_x \tag{4.11}$$

e a variância será

$$V(Y) = V\left(\frac{1-Z}{1-v} - 1\right) = \frac{1}{(1-v)^2}\,V(Z) \tag{4.12}$$

4.4 Formulação probabilística para a renda antecipada de termos em progressão geométrica

Trate-se agora o caso de uma renda antecipada variando em progressão geométrica de razão θ, considerando $r = 1 + \theta$. Considere-se agora a variável Y definida por,

$$Y = 1 + rv + r^2v^2 + \cdots + r^Kv^K = (G\ddot{a})^{r}_{\overline{K+1|}} \tag{4.13}$$

Tome-se $v_1 = rv$. Considerando (4.6) e (4.7) temos então que,

$$Y = 1 + v_1 + v_1^2 + \cdots + v_1^K = \ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \frac{1 - {v_1}^{K+1}}{1 - v_1}\,. \tag{4.14}$$

Portanto,

$$Y = \frac{1 - r^{K+1}v^{K+1}}{1 - rv}\,. \tag{4.15}$$

Assim, temos então que o valor esperado de Y será dado por,

$$E(Y) = E\left(\frac{1-(rv)^{K+1}}{1-rv}\right) = \frac{1-\sum_{k=0}^{\infty}(rv)^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k}}{1-rv} \tag{4.16}$$

e a variância de Y por,

$$\begin{aligned} V(Y) = \frac{1}{(1-rv)^2}\Bigg(&\sum_{k=0}^{\infty}((rv)^{k+1})^2\ {}_kp_x q_{x+k} \\ &-\left(\sum_{k=0}^{\infty}(rv)^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k}\right)^2\Bigg). \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.5 Formulação probabilística para a renda postecipada de termos em progressão geométrica

Trate-se agora, de igual forma, o caso da renda postecipada variando em progressão geométrica. Considere-se agora a variável Y definida por,

$$Y = v + rv^2 + r^2v^3 + \cdots + r^{K-1}v^K = (Ga)_{\overline{K|}}^{r} \tag{4.18}$$

Novamente, tome-se $v_1 = rv$. Então:

$$\begin{aligned} Y = v + rv^2 + r^2v^3 + \cdots + r^{K-1}v^K &= \frac{1}{r}\left(rv + r^2v^2 + \cdots + r^Kv^K\right) = \\ &= \frac{1}{r}\left(v_1 + {v_1}^2 + \cdots + {v_1}^K\right) = \frac{1}{r}\ddot{a}_{\overline{K|}} = \frac{1}{r}\left(\ddot{a}_{\overline{K+1|}} - 1\right) = \\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{1-{v_1}^{K+1}}{1-v_1} - 1\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{1-(rv)^{K+1}}{1-rv} - 1\right). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Assim,

$$E[Y] = \frac{1}{r}\left(\frac{1-\ E[(rv)^{K+1}]}{1-rv} - 1\right) = \frac{1-\ \sum_{k=0}^{\infty}(rv)^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}}{r(1-rv)} - \frac{1}{r} \tag{4.20}$$

e

$$V(Y) = \frac{1}{\left(r(1-rv)\right)^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}((rv)^{k+1})^2 \ {}_kp_x \, q_{x+k} - \left(\sum_{k=0}^{\infty}(rv)^{k+1} \ {}_kp_x \, q_{x+k}\right)^2\right). \tag{4.21}$$

5 Teorema Limite Central

O Teorema Limite Central é um dos resultados mais importantes na teoria das Probabilidades e Estatística, sendo que garante que a distribuição da soma normalizada de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, converge para a distribuição Normal de média 0 e variância 1.

Segundo Fischer (2010) existem diferentes versões deste teorema. De seguida enunciamos a forma mais geral e conhecida do TLC e também uma generalização deste teorema desenvolvida por Lyapunov.

A demonstração do Teorema Limite Central para variáveis $i.i.d.$, de seguida enunciado, pode ser consultada em Magalhães (2004).

5.1 Teorema Limite Central para variáveis *i.i.d.*

Seja $X_1, \dots, X_n$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas, com média μ e variância σ^2, com $0 < \sigma^2 < \infty$. Defina-se a variável aleatória Z_n como sendo,

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \,, \qquad \text{com } S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \,.$$

Então, a distribuição de Z_n converge para uma distribuição Normal reduzida, quando $n \to +\infty$, ou seja, a sua distribuição assimptótica é uma Normal reduzida:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

O Teorema Limite Central de Lyapunov, apresentado em seguida, garante que a soma de variáveis aleatórias independentes, devidamente padronizadas, converge para a distribuição Normal reduzida, desde que seja verificada uma determinada condição de Lyapunov. Trata-se de uma generalização do teorema limite central pela razão que estas variáveis não têm de ser identicamente distribuídas.

Em geral, cada indivíduo pertencente ao plano de pensões apresentará uma pensão diferente, por consequência da determinação da fórmula de cálculo da pensão que normalmente contempla características individuais do individuo, como pode ser o caso da sua data de entrada para o plano, do seu tempo de serviço, das suas contribuições, ou ainda por outras variadíssimas razões. Por consequência, as variáveis aleatórias que teremos em conta não serão identicamente distribuídas, o que não permitirá a aplicação do Teorema Limite Central na sua forma primária. Por esta razão será necessário considerar a generalização de Lyapunov para o Teorema Limite Central, pois, neste caso, basta que as variáveis aleatórias sejam independentes.

5.2 Teorema Limite Central de Lyapunov

Seja $X_1, \dots, X_n$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes em que $E(X_i) = \mu_i$ e $V(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ e pelo menos um com dos σ_i^2 maior que zero . Sejam $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ e $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

Se a condição de Lyapunov se verificar, isto é, se existir um $\delta > 0$ tal que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - \mu_i|^{2+\delta}\right) = 0$$

então,

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

Em Billingsley (1995) podemos encontrar a demonstração deste teorema (Theorem 27.3) que é apresentado como corolário do Teorema de Lindeberg (Theorem 27.2 da mesma referência). No que se segue, demonstra-se que o teorema pode ser aplicado à v.a. Z e, consequentemente, ao seguro de vida inteira e às rendas vitalícias apresentadas.

Para verificar a condição de Lyapunov sejam x_i , $i = 1, \dots, n$ as vidas presentes na carteira. $Z_i = v^{K_i+1}$ onde K_i é a v.a. tempo de vida futura em anos completos de (x_i).

Para as leis de mortalidade com limites técnicos e taxas de juro positivas (situação usual), está garantida a existência de momentos de qualquer ordem, isto é,

$$\mathrm{E}\left[\left|Y_i - A_{x_i}\right|^m\right] < +\infty\,, \ \ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Por exemplo, considere-se que $\mathrm{E}\left[\left|Y_i - A_{x_i}\right|^4\right] = \mu_{4,x_i}$ existe, embora baste que $\mathrm{E}\left[\left|Y_i - A_{x_i}\right|^{2+\delta}\right] < +\infty$ com $\delta > 0$ exista. Assim,

$$s_n{}^2 = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}{}^2$$

Considere-se agora a condição de Lyapunov para este caso,

$$0 \leq \frac{1}{s_n{}^{2+2}} \sum_{i=1}^{n} \mu_{4,x_i} \leq \frac{n \ \max\limits_i \mu_{4,x_i}}{\left(\sqrt{n \ \min\limits_i V(Y_i)}\right)^{2+2}} = \frac{n \ \max\limits_i \mu_{4,x_i}}{n^2 \min\limits_i V^2(Y_i)} =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\max\limits_i \mu_{4,x_i}}{\min\limits_i V^2(Y_i)} \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow +\infty)$$

Considere-se agora o caso genérico $\delta > 0$,

$$0 \leq \frac{1}{s_n{}^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} \mu_{2+\delta,x_i} \leq \frac{1}{n} \frac{\max\limits_i \mu_{2+\delta,x_i}}{\min\limits_i V^{\delta}(Y_i)} \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow +\infty).$$

Desta forma está demonstrada aplicabilidade do Teorema Limite Central de Lyapunov ao caso em estudo.

Na secção 8.4.1 verifica-se empiricamente este resultado considerando a população em estudo, duplicando e quintuplicando a mesma, observando-se que a amplitude dos intervalos de confiança vai reduzindo.

6 Intervalos de confiança para as responsabilidades

Este capítulo é dedicado à determinação de intervalos de confiança para as responsabilidades com pensões em pagamento. Recorrendo ao Teorema Limite Central de Lyapunov, apresentado no capítulo anterior, será deduzida a forma de cálculo do intervalo de confiança para as responsabilidades afetas a determinada faixa etária. Posteriormente, será então apresentada a forma de cálculo do intervalo de confiança para as responsabilidades com toda a população, reunindo todos os diferentes grupos de cada faixa etária.

6.1 Intervalo de confiança para determinada faixa etária

Considere-se um grupo de n indivíduos de idade x e seja P_i a pensão a pagar ao indivíduo $i = 1, \dots, n$. Considere-se Y_i como sendo uma das variáveis aleatórias Y definida no Capitulo 3, escolhida consoante o tipo de esquema de pagamentos em vigor no plano. O valor atual das pensões em pagamento para o indivíduo i será $X_i = P_i Y_i$. Denote-se por T_x o valor atual das pensões em pagamento para um grupo de n indivíduos com idade x, dado por:

$$T_x = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \, Y_i \qquad (6.1)$$

Dado que X_i são variáveis aleatórias independentes e, considerando que se verifica a condição de Lyapunov, podemos dizer que estamos nas condições do Teorema Limite Central de Lyapunov. Então a distribuição assimptótica de $\frac{T_x - E(T_x)}{\sqrt{V(T_x)}}$ é uma Normal reduzida:

$$\frac{T_x - E(T_x)}{\sqrt{V(T_x)}} \overset{a}{\sim} N(0, 1) \qquad (6.2)$$

em que,

$$E(T_x) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i\, E(Y) \tag{6.3}$$

e,

$$V(T_x) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = V\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} {P_i}^2\, V(Y) \neq 0\,. \tag{6.4}$$

Recorrendo ao TLC de Lyapunov podemos então determinar um intervalo de confiança $(1-\propto) \times 100\%$ para T_x :

$$-z_{\propto/2} \leq \frac{T_x - E(T_x)}{\sqrt{V(T_x)}} \leq z_{\propto/2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$E(T_x) - z_{\propto/2}\sqrt{V(T_x)} \leq T_x \leq E(T_x) + z_{\propto/2}\sqrt{V(T_x)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} P_i\, E(Y) - z_{\propto/2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {P_i}^2\, V(Y)} &\leq T_x \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} P_i\, E(Y) + z_{\propto/2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {P_i}^2\, V(Y)}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

6.2 Intervalo de confiança para toda a população

Pretende-se agora obter de um intervalo de confiança para o valor atual das responsabilidades para toda a população. Considere-se então uma população formada por k subgrupos, cada um correspondente à faixa etária k, com $k = 0, \dots, \omega$ (idade limite da tábua de mortalidade), com n_{x_k} indivíduos de idade x_k.

Seja P_{i,x_k} a pensão a pagar ao indivíduo i com idade x_k. Desta forma, denote-se por T_{total} o valor atual das pensões em pagamento de toda a população, definido por

$$T_{total} = \sum_{k=0}^{\omega} \sum_{i=1}^{n_{x_k}} P_{i,x_k} Y_{i,x_k} = \sum_{k=0}^{\omega} T_{x_k} \tag{6.6}$$

Novamente, sendo que T_{x_k} são variáveis aleatórias independentes, assumindo que se verifica a condição de Lyapunov, podemos dizer que estamos nas condições do Teorema Limite Central de Lyapunov. Então a distribuição assimptótica de $\frac{T_{total}-E(T_{total})}{\sqrt{V(T_{total})}}$ é uma Normal reduzida:

$$\frac{T_{total} - E(T_{total})}{\sqrt{V(T_{total})}} \overset{a}{\sim} N(0,1) \tag{6.7}$$

Sendo que,

$$E(T_{total}) = E\left(\sum_{k=0}^{\omega} T_{x_k}\right) = \sum_{k=0}^{\omega} E\left(T_{x_k}\right) = \sum_{k=0}^{\omega} \sum_{i=1}^{n} P_i \, E\left(Y_{x_k}\right) \tag{6.8}$$

e,

$$V(T_{total}) = V\left(\sum_{k=0}^{\omega} T_{x_k}\right) = \sum_{k=0}^{\omega} V\left(T_{x_k}\right) = \sum_{k=0}^{\omega} \sum_{i=1}^{n} {P_i}^2 \, V\left(Y_{x_k}\right) \neq 0\,. \tag{6.9}$$

Pode-se então, construir um intervalo de confiança $(1-\propto) \times 100\%$ para T_{total} :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\omega} \sum_{i=1}^{n} P_i \, E\left(Y_{x_k}\right) - z_{\propto/2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\omega} \sum_{i=1}^{n} {P_i}^2 \, V\left(Y_{x_k}\right)} \leq T_{total} \\ \leq \sum_{k=0}^{\omega} \sum_{i=1}^{n} P_i \, E\left(Y_{x_k}\right) + z_{\propto/2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\omega} \sum_{i=1}^{n} {P_i}^2 \, V\left(Y_{x_k}\right)} \end{aligned} \tag{6.10}$$

em que $E\left(Y_{x_k}\right)$ e $V\left(Y_{x_k}\right)$ serão obtidos a partir das expressões apresentadas nas secções 4.2 a 4.5, de acordo com as especificidades do plano de pensões em causa.

7 Planos e Fundos de pensões

Neste capítulo serão apresentadas algumas notas teóricas sobre fundos de pensões e planos de pensões por estes financiados. A matéria deste capítulo é inspirada nas referências Afonso (2013) e Garcia (2007).

De um modo genérico o envelhecimento demográfico que se tem verificado desde as duas últimas décadas do século XX veio trazer sérios desafios à sustentabilidade financeira dos sistemas públicos de pensões. Desta forma, várias organizações coletivas e empresas começaram a proporcionar aos seus colaboradores esquemas privados de pensões, com efeito através da criação de planos de pensões, os quais têm vindo a assumir uma relevância crescente no mercado financeiro.

7.1 Planos de pensões

Um plano de pensões, como o próprio nome indica, consiste num conjunto de regras que permitem a uma dada pessoa, ou ao seu agregado familiar, habilitar-se ao recebimento de uma ou mais prestações, normalmente liquidadas sob a forma de pensão, caso se verifiquem os acontecimentos contemplados no mesmo. Essa pensão pode tomar diversas formas e estar associada a diversos graus de cobertura de risco.

Os planos de pensões podem conceder benefícios em diversas situações, sendo as mais frequentes: reforma por idade, pré-reforma, reforma por invalidez e sobrevivência.

A principal classificação dos planos resulta das suas grandes variáveis, são elas benefícios e contribuições. Assim, um plano pode ser distinguido como Plano de Benefício Definido, ou Plano de Contribuição Definida, e ainda uma conjugação de ambos.

Em seguida será apresentada uma breve descrição dos principais tipos de planos de pensões existentes e as suas características.

7.1.1 Plano de Benefício Definido

Quando o valor do benefício atribuído pelo plano, seja de reforma, invalidez ou outro, se encontrar descrito nas regras do plano através de uma fórmula, tabela, conjugação de ambos ou ainda outro parâmetro que permita a determinação do valor de benefício, então estamos perante um plano de Benefício Definido.

A fórmula para determinação do montante das pensões pode assumir diversas formas, apresentam-se as seguintes possibilidades:

- Montante fixo final
- Percentagem fixa do salário
- Montante fixo anual por ano de serviço
- Percentagem fixa do salário por ano de serviço

Este tipo de plano apresenta várias vantagens para o participante, pois este conhece à partida a sua pensão/garantia e portanto não tem qualquer exposição ao risco de investimento, ficando este a cargo da empresa. Obviamente que por outro lado o participante também não irá beneficiar da performance dos investimentos, ficando a empresa com este benefício que poderá também traduzir-se num risco.

O papel do atuário neste tipo de plano revela-se de grande importância, será necessário realizar avaliações atuariais periódicas uma vez que será necessário conhecer o valor atual dos ativos que permite o pagamento dos benefícios que a entidade se prometeu a satisfazer. Tal implica fazer um reconhecimento das variantes que possam influenciar a valorização do plano, entre elas estão fatores de natureza demográfica, económica e financeira.

7.1.2 Plano de Contribuição Definida

Nos planos de contribuição definida é previamente estabelecido o montante das contribuições a realizar em cada período, desta forma o benefício será o que resultar do montante acumulado no momento da reforma. Trata-se de uma conta poupança individual que dependerá do valor das contribuições efetuadas, do rendimento proveniente das decisões de investimento tomadas pelo gestor e das condições de mercado até então.

Num plano desta natureza o risco é suportado pelos membros, pois caso o investimento das verbas não seja bem sucedido, os beneficiários arriscam-se a receber um benefício relativamente reduzido. Neste tipo de plano existe uma maior facilidade na análise e supervisão do plano.

7.2 Fundos de pensões

Os planos de pensões podem ser financiados através de veículos específicos, como é o caso dos fundos de pensões ou contratos de seguro.

Um Fundo de Pensões é um veículo de financiamento do Plano de Pensões. Os fundos de pensões constituem um património autónomo destinado à concretização/realização de um ou mais planos de pensões.

Qualquer que seja o veículo de financiamento utilizado, este trata-se de um meio destinado a complementar, ou até mesmo suprir totalmente a proteção social na velhice dos contribuintes e beneficiários. Desta forma, é exigido que os fundos sejam geridos com prudência e segurança, respeitando regras e normas de conduta, por forma a controlar a evolução dos ativos e passivos, tentando otimizar resultados sem no entanto colocar em risco os objetivos estabelecidos.

Os fundos de pensões podem ser classificados tendo em conta o tipo de vínculo existente entre os vários aderentes e distinguem-se entre fundos fechados e fundos abertos.

- **Fundo de Pensões Fechado**: considera-se que um fundo de pensões é fechado quando diz respeito a apenas um associado ou, no caso de vários, estes possuem uma relação profissional, empresarial ou associativa e a admissão de novos associados depende sempre do consentimento dos primeiros. Estes fundos são, assim, na maioria, promovidos no âmbito de uma empresa ou organização.
- **Fundo de Pensões Aberto**: considera-se que um fundo de pensões é aberto quando não é exigido qualquer vínculo entre os seus participantes, e em que a adesão depende somente da aceitação da entidade gestora.

7.3 Métodos de financiamento

Os métodos de financiamento/avaliação de responsabilidades têm como principal objetivo criar provisões necessárias para que o fundo possa cumprir o plano estabelecido, isto é, para que possa, em tempo oportuno e sem entrega de contribuições extraordinárias, pagar as pensões devidas aos beneficiários e garantir a sua solvência ao longo do tempo.

O financiamento de um plano de pensões de benefício definido deve ser feito por forma a garantir que o valor atual dos benefícios à idade em que vão ser iniciados esteja fundeado. A escolha de um método de financiamento não altera o custo do plano, apenas incorre numa distribuição dos custos ao longo do tempo de vida do fundo. Um bom método de financiamento deve permitir a correta determinação das responsabilidades atuariais bem como determinar o valor das contribuições de forma a financiar o valor do fundo e, dessa forma, salvaguardar os benefícios dos participantes.

Apesar do financiamento do plano poder ser feito através de métodos distintos, existem princípios gerais aplicáveis a qualquer um dos métodos.

O VABT, valor atual dos benefícios totais, corresponde ao valor atual dos benefícios a que o beneficiário terá direito à idade de reformas. Nos métodos em que se separam as responsabilidades em tempo de serviço passado e tempo de serviço futuro, é dado pela soma destas responsabilidades, ou seja,

$$VABT = VARSP + VARSF\ .$$

O nível de financiamento é dado pela proporção das responsabilidades inerentes ao plano de pensões que se encontra financiado pelo fundo, fornecendo informação acerca da eventual necessidade de reforço do fundo. Sendo F o valor do fundo, o nível de financiamento é então dado por,

$$R = \frac{F - VAPP}{VARSP}$$

em que se $R > 1$ então o fundo está sobrefinanciado. Caso $R = 1$ então o fundo encontra-se financiado a 100%, e se $R < 1$ o fundo está subfinanciado e portanto será necessário apurar o montante em falta:

$$RSPNA = VARSP - (F - VAPP).$$

8 Caso prático

Neste capítulo serão aplicadas, a um caso prático, as metodologias até agora descritas. Serão descritas as regras de um plano de pensões fictício que será relacionado a um conjunto de dados reais de uma empresa portuguesa, por forma a proceder a uma avaliação atuarial das responsabilidades e, então aplicar os intervalos de confiança deduzidos na secção 6. Os cálculos que irão ser apresentados neste capítulo foram efetuados recorrendo à ferramenta de cálculos Microsoft Excel.

8.1 Regras do plano

Vamos considerar um plano de pensões, fictício, de benefício definido. Todos os trabalhadores da empresa serão considerados elegíveis para este plano caso tenham dois ou mais anos de serviço. A idade normal de reforma (INR) considerada é de 65 anos, e têm direito ao benefício de reforma por velhice todos os participantes elegíveis e que atinjam a INR ao serviço da empresa.

O salário pensionável a considerar será o conjunto das componentes salariais recebidas nos últimos doze meses de trabalho antes da reforma. A pensão anual por velhice a adquirir é de 25%, acrescido de 0,75% por cada ano de serviço, do salário anual pensionável. A pensão assim calculada será paga anual e vitaliciamente, no início de casa período.

$$Pensão_{reforma} = 0{,}25 \times Salário_{reforma} + 0{,}0075 \times Nº\ anos\ de\ serviço\ .$$

A base de dados fornecida contém a data de nascimento, o sexo, a data de admissão na empresa, o salário pensionável no caso dos trabalhadores ativos, e pensão em pagamento no caso dos reformados.

8.2 Pressupostos atuariais

Para se proceder à avaliação atuarial foram assumidos os seguintes pressupostos:

Tabela 8.1 - Pressupostos atuariais e financeiros

Data da avaliação	31/12/2014
Tábua de mortalidade	TV 88/90
Tábua de invalidez	EKV 80
Taxa técnica	3,75%
Taxa de rendimento do fundo	3,75%
Taxa de crescimento salarial	1,50%
Taxa de crescimento das pensões	0,75%

As responsabilidades que serão apresentadas foram calculadas com base no método *Projected Unit Credit*, considerando os decrementos por morte e invalidez.

8.3 Análise da população

Em seguida será apresentada uma análise detalhada da população a que se aplicou o cálculo das responsabilidades.

Tabela 8.2 - Estatísticas da população ativa e inativa

Ativos	
Número	2286
Idade média	43,01 anos
Tempo de serviço passado médio	18,24 anos
Tempo de serviço futuro médio	21,99 anos
Massa salarial anual	33 234 336 €
Salário médio anual	14 538 €
Pensionistas	
Número	827
Idade média	70,10 anos
Pensão média anual	18 317 €

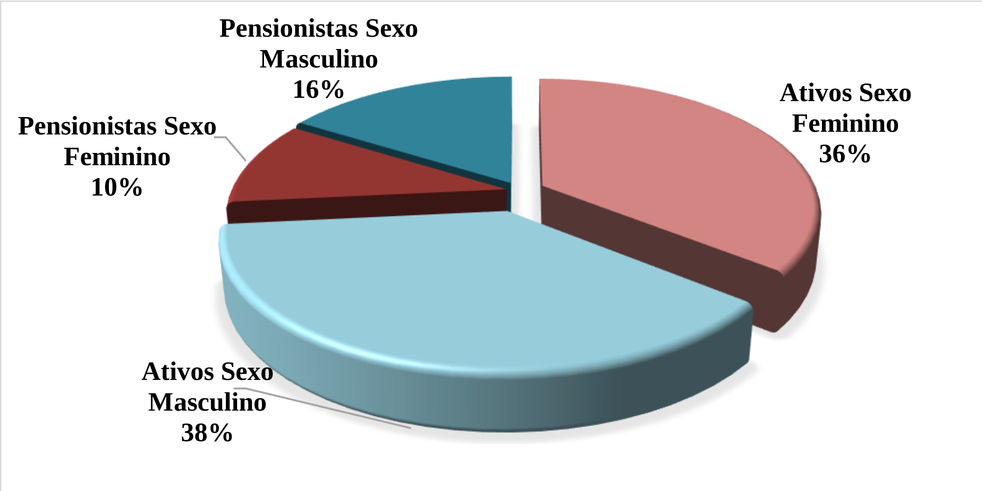

Figura 8.1 - Distribuição da população por categoria e sexo

Tal como o gráfico ilustra, cerca de ¾ da população é ativa. A população do sexo masculino é ligeiramente superior à população feminina, tanto nos pensionistas como nos ativos. O que significa que no geral temos uma maioria masculina (54%), mas bem contrabalançada com a população feminina que representa 46% da população total.

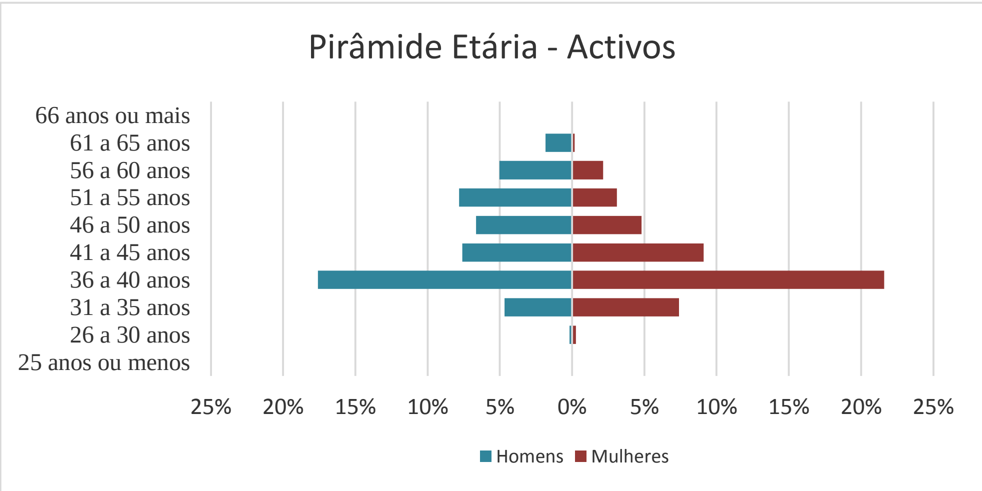

Figura 8.2 - Pirâmide etária da população ativa

A maior percentagem de ativos encontra-se na faixa dos 36 aos 40 anos, e contrariamente à visão geral, nesta faixa de idades as mulheres encontram-se em maioria.

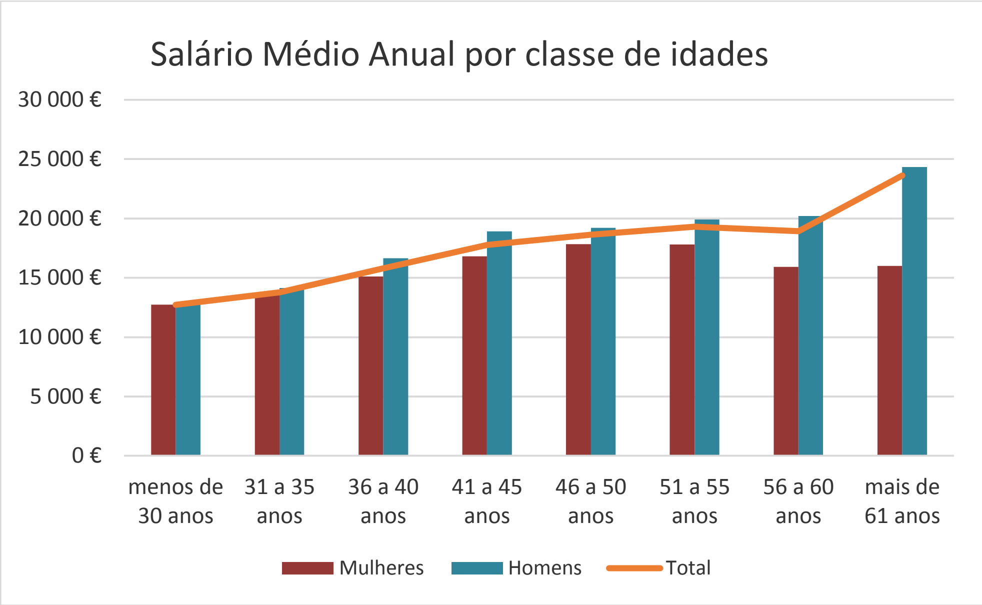

Figura 8.3 - Distribuição do salário médio anual por classes de idades

Pode observar-se que em todos os escalões de idade, os homens auferem um salário médio anual superior aos das mulheres. Verifica-se também uma tendência de crescimento salarial que acompanha o avançar da idade. Para a população ativa atual o salário médio anual para mulheres com idade próxima da INR é de 16.000€, e para homens é de quase 25.000€.

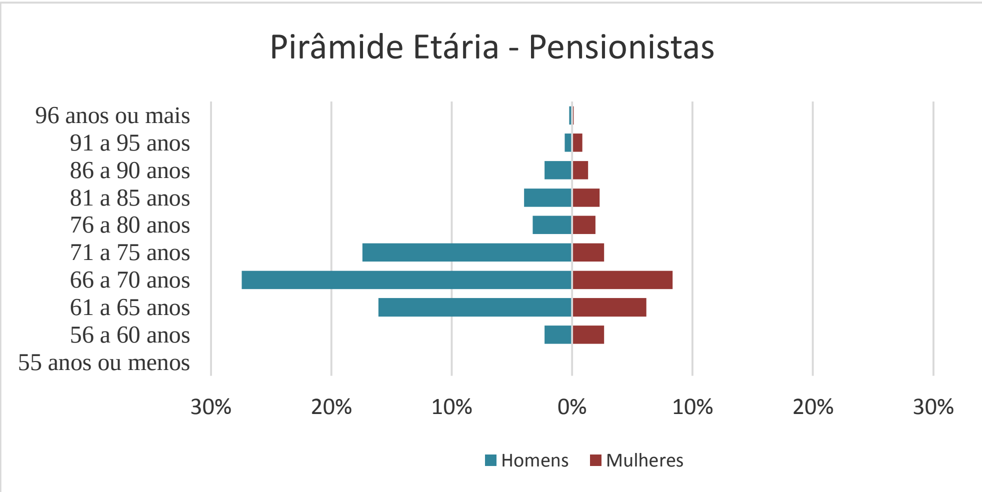

Figura 8.4 - Pirâmide etária da população inativa

A maioria dos pensionistas encontra-se entre os 65 e os 75 anos de idade. Considerando apenas a população pensionista é notório que os homens se encontram em vasta maioria.

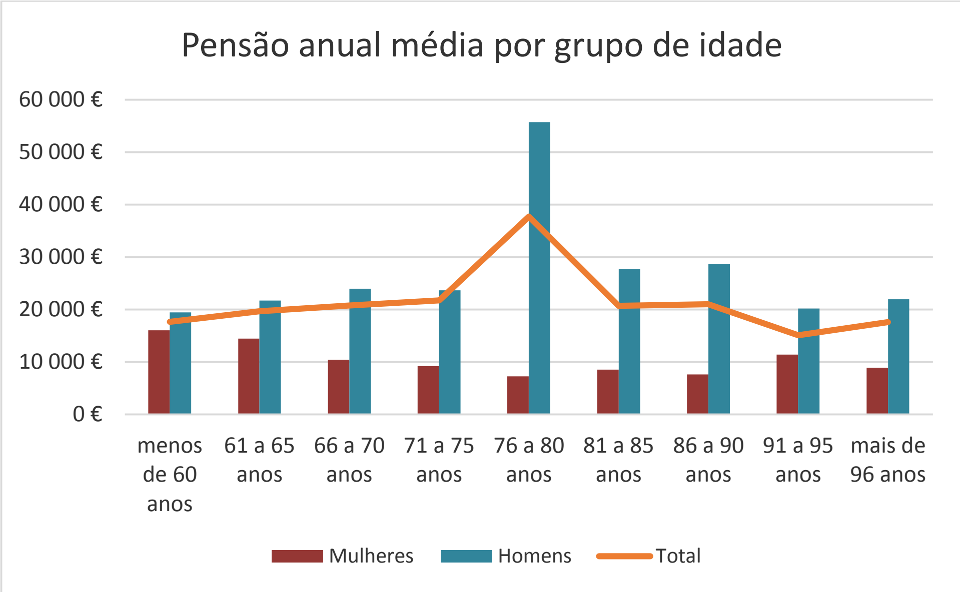

Figura 8.5 - Distribuição da pensão anual média por classes de idades

No geral, os homens pensionistas recebem uma pensão anual média bastante superior à das mulheres. Verifica-se um pico na pensão anual média dos homens entre os 76 e os 80 anos de idade. Isto talvez se verifique pela razão de que nesta classe se enquadram alguns pensionistas que pertenciam à administração da empresa e como tal auferem uma pensão bastante superior à generalidade dos restantes pensionistas.

8.4 Resultados

Antes de apresentar os resultados aplicados à população será apresentada uma tabela para diferentes idades e valores de taxa técnica.

Para uma renda vitalícia de termos constantes, tem-se:

Tabela 8.3 - Valor das rendas vitalícias de termos constantes e da variância para várias taxas de juro e idades

		Renda antecipada		Renda postecipada	
i	x	$E(Y) = \ddot{a}_x$	$V(Y)$	$E(Y) = a_x$	$V(Y)$
3,25%	65	14,58	21,36	13,58	21,36
	70	12,32	20,50	11,32	20,50
	75	9,99	18,37	8,99	18,37
3,75%	65	13,94	18,30	12,94	18,30
	70	11,87	18,00	10,87	18,00
	75	9,69	16,52	8,69	16,52
4,25%	65	13,35	15,75	12,35	15,75
	70	11,44	15,85	10,44	15,85
	75	9,40	14,88	8,40	14,88

Para uma renda vitalícia com termos em progressão geométrica de razão $r = 1{,}075$, tem-se:

Tabela 8.4 - Valor das rendas vitalícias de termos em progressão geométrica e da variância para várias taxas de juro e idades

		Renda antecipada		Renda postecipada	
i	x	$E(Y) = G\ddot{a}_x$	$V(Y)$	$E(Y) = Ga_x$	$V(Y)$
3,25%	65	15,66	27,32	14,55	26,91
	70	13,08	25,20	11,99	24,82
	75	10,48	21,76	9,41	21,43
3,75%	65	14,95	23,28	13,84	22,93
	70	12,58	22,03	11,50	21,70
	75	10,16	19,49	9,09	19,21
4,25%	65	14,29	19,92	13,19	19,62
	70	12,12	19,33	11,03	19,04
	75	9,85	17,51	8,78	17,25

8.4.1 Intervalo de confiança para as responsabilidades com a faixa etária dos pensionistas com 65 anos

De entre toda a população, considerou-se a faixa etária dos pensionistas com 65 anos de idade. Trata-se de um grupo com 52 indivíduos, sendo 12 do sexo feminino e 50 do sexo masculino, e uma pensão média anual de 17 473€.

Como foi referido na descrição do plano, o pagamento é realizado no início do ano, portanto teremos de considerar uma renda vitalícia anual antecipada com termos em progressão geométrica. Seja P_i a pensão anual em pagamento do indivíduo i, então a responsabilidade atuarial das pensões em pagamento para este grupo etário será

$$VAPP_{65} = \sum_{i=1}^{52} P_i \, G\ddot{a}_{65} \, .$$

Com base nos dados e pressupostos em análise, e considerando (4.16) temos que,

$$E(Y) = G\ddot{a}_{65} = 14{,}95$$

e portanto resulta,

$$VAPP_{65} = \sum_{i=1}^{52} P_i \, G\ddot{a}_{65} = 13\,581\,341 \text{ €} \, .$$

Pretende-se construir um intervalo de confiança a 95% para a responsabilidade atuarial dos benefícios em pagamento para este grupo etário. Portanto considere-se $z_{2.5\%}$ o quantil de ordem $1 - \frac{0.05}{2}$ da distribuição Normal (0,1). Tem-se então que $z_{2.5\%} = 1{,}96$.

Considerando (4.17) temos,

$$V(Y) = \frac{1}{(1-rv)^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}((rv)^{k+1})^2 \;{}_{k}p_{65}q_{65+k} - \left(\sum_{k=0}^{\infty}(rv)^{k+1} \;{}_{k}p_{65}q_{65+k}\right)^2\right) = 23{,}28 \, .$$

Desta forma, os limites do intervalo de confiança, recorrendo ao TLC de Lyapunov, com base em (6.5), serão dados por:

$$\sum_{i=1}^{52} P_i \, E(Y) - z_{2.5\%}\sqrt{\sum_{i=1}^{52} {P_i}^2 \, V(Y)} \leq \; VAPP_{65} \leq \sum_{i=1}^{52} P_i \, E(Y) + z_{2.5\%}\sqrt{\sum_{i=1}^{52} {P_i}^2 \, V(Y)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$13\,581\,341 \; - 1{,}96\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {P_i}^2 \times 23{,}28} \leq \; VAPP_{65} \leq 13\,581\,341 \; + 1{,}96\sqrt{\sum_{i=1}^{52} {P_i}^2 \times 23{,}28}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$13\,581\,341\ -1{,}96\sqrt{463\,064\,609\,372} \leq\ VAPP_{65} \leq 13\,581\,341\ +1{,}96\sqrt{463\,064\,609\,372}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$12\,287\,075 \leq\ VAPP_{65} \leq 14\,875\,607$$

Portanto, pode-se dizer que, com 95% de confiança, o valor atual dos benefícios totais deste grupo etário está no intervalo entre os 12 287 075€ e os 14 875 607€.

Recorde-se que já foi verificada a condição de Lyapunov na secção 5.2 . De seguida verificaremos a condição, empiricamente, usando a população em questão. Para isso iremos criar, da mesma forma, intervalos de confiança considerando o dobro e o quíntuplo da população em análise, de forma a verificar se a amplitude dos intervalos irá reduzindo comparativamente ao valor estimado das responsabilidades.

Tabela 8.5 - Evolução da amplitude do IC em relação ao $VAPP_{65}$

	LI	$VAPP_{65}$	LS	Amplitude	% Amplitude
População original	12 287 075	13 581 341	14 875 607	2 588 532	19,06%
2×População original	25 332 314	27 162 682	28 993 051	3 660 737	13,48%
5×População original	65 012 639	67 906 706	70 800 772	5 788 133	8,52%

Desta forma confirma-se a convergência da condição de Lyapunov, pois a amplitude do intervalo de confiança, relativamente ao VAPP, vai reduzindo à medida que consideramos uma população maior.

Caso o plano contemple outras características para o pagamento das pensões ter-se-iam os seguintes resultados:

Tabela 8.6 - Intervalos de confiança para o $VAPP_{65}$ considerando outras rendas

	LI	$VAPP_{65}$	LS
Renda antecipada de termos constantes	11 517 838€	12 665 521€	13 813 204€
Renda postecipada de termos constantes	10 609 221€	11 756 904€	12 904 587€
Renda postecipada de termos em progressão geométrica	11 293 755€	12 578 386€	13 863 018€

8.4.2 Intervalo de confiança para as responsabilidades com os pensionistas

Considere-se agora toda a população de pensionistas, em que as faixas etárias variam entre os 60 e os 102 anos de idade. A população é constituída 827 indivíduos, sendo 218 do sexo feminino e 609 do sexo masculino.

De seguida ir-se-á construir um intervalo de confiança a 95% para o valor atual dos benefícios de toda a população. Com base nos dados, regras do plano e pressupostos em análise, tem-se que,

$$\sum_{k=0}^{\omega}\sum_{i=1}^{n} P_i\, E\left(Y_{x_k}\right) = \sum_{k=0}^{w}\sum_{i=1}^{n} P_i\, G\ddot{a}_{x_k} = 187\ 517\ 616$$

e

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\omega}\sum_{i=1}^{n} {P_i}^2\, V\left(Y_{x_k}\right)} = \sqrt{10\ 091\ 828\ 844\ 187} = 3\ 176\ 764\ .$$

Desta forma, recorrendo ao TLC de Lyapunov, com base em (6.10), temos que o VAPP terá como intervalo de confiança a 95%:

$$187\ 517\ 616 - 1{,}96 \times 3\ 176\ 764 \leq\ VAPP \leq 187\ 517\ 616 + 1{,}96 \times 3\ 176\ 764$$

$$\Leftrightarrow$$

$$181\ 291\ 273 \leq\ VAPP \leq 193\ 743\ 959$$

Portanto, com 95% de confiança, o valor atual das pensões em pagamento encontra-se entre os 181 291 273€ e os 193 743 959€.

De forma análoga à apresentada na secção anterior, foi verificada, empiricamente, a condição de Lyapunov para aplicação do resultado.

Na tabela seguinte encontram-se os resultados caso fossem consideradas outro tipo de rendas.

Tabela 8.7 - Intervalos de confiança para o VAPP considerando outras rendas

	LI	VAPP	LS
Renda antecipada de termos constantes	170 626 035€	176 287 053€	181 948 072€
Renda postecipada de termos constantes	155 477 915€	161 138 933€	166 799 952€
Renda postecipada de termos em progressão geométrica	164 906 355€	171 086 348€	177 266 341€

Obter intervalos de confiança para as responsabilidades atuariais traduz-se numa mais-valia para o gestor do fundo que cobre o plano de pensões. Mais do que oferecer um único valor para a responsabilidade, fornece um intervalo, o qual, conjugado com uma análise de sensibilidade de fatores, como por exemplo o crescimento das pensões ou a taxa técnica, pode levar a uma melhor gestão dos fundos existentes.

8.4.3 Intervalo de confiança para as responsabilidades com a população ativa

Como já vimos anteriormente, a população ativa é constituída por 2286 indivíduos, dos quais 1111 são do sexo feminino e 1175 do sexo masculino. A massa salarial para o ano da avaliação é de 33 234 336€, apresentando um salário médio anual de 14 538€.

Conforme as regras do plano, o trabalhador terá direito a uma pensão por velhice correspondente a 25% do salário à idade normal de reforma, acrescido de 0,75% por cada ano de serviço.

No caso dos ativos, ter-se-á apenas em conta a aleatoriedade do tempo de vida futura após a idade normal de reforma, ou seja, o fator aleatório entre a idade atual até à idade normal de reforma não será tido em conta para os intervalos de confiança determinados em seguida.

O valor atual dos benefícios totais será então

$$VABT = \sum_{i=1}^{2286} B_{i,INR} \times {}_{TSF_i}p_{x_i} \times v^{TSF_i} \times G\ddot{a}_{INR}$$

sendo que $B_{i,INR}$ será o valor de benefício do indivíduo i à INR, que de acordo com as regras do plano será,

$$B_{i,INR} = 25\% \times S_x \times (1 + txcs)^{TSF} + 0{,}75\% \times TST \times S_x \times (1 + txcs)^{TSF}$$

onde $txcs$ representa a taxa de crescimento salarial e S_x o salário atual do indivíduo.

Assim, o valor atuarial das responsabilidades com o tempo já decorrido será

$$VARSP = \sum_{i=1}^{2286} \frac{TSP_i}{TST_i} \times B_{i,INR} \times {}_{TSF_i}p_{x_i} \times v^{TSF_i} \times G\ddot{a}_{INR} \,.$$

Considerando a variável aleatória Y definida em (4.13), e considerando que $x = INR$ temos que

$$E(Y) = G\ddot{a}_{INR} = 14{,}95$$

e que

$$V(Y) = 23{,}28 \,.$$

Considerando os dados e pressupostos adotados, resulta

$$\sum_{i=1}^{2286} \frac{TSP_i}{TST_i} \times B_{i,INR} \times {}_{TSF_i}p_{x_i} \times v^{TSF_i} \times E(Y) = 83\ 022\ 377$$

e,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{2286} \left(\frac{TSP_i}{TST_i} \times B_{i,INR} \times {}_{TSF_i}p_{x_i} \times v^{TSF_i}\right)^2 \times V(Y)} = \sqrt{530\ 254\ 127\ 059} = 728\ 186$$

Desta forma um intervalo de confiança a 95% para o valor atuarial das responsabilidades com serviços passados será,

$$83\ 022\ 377 - z_{2.5\%} \times 728\ 186 \leq VARSP \leq 83\ 022\ 377 + z_{2.5\%} \times 728\ 186$$

$$\Leftrightarrow$$

$$81\ 595\ 160 \leq VARSP \leq 84\ 449\ 594$$

Assim, estima-se que o valor atuarial das responsabilidades com serviços passados esteja entre os 81 595 160€ e os 84 449 594€.

De seguida está representada a evolução da amplitude do intervalo de confiança em relação ao valor atuarial das responsabilidades com serviços passados, de forma a verificar a condição de Lyapunov. Verifica-se que a amplitude do IC vai reduzindo à medida que aumentamos a população.

Tabela 8.8 - Evolução da amplitude do IC em relação ao VARSP

	LI	VARSP	LS	Amplitude	% Amplitude
População original	81 595 160	83 022 377	84 449 594	2 854 435	3,44%
2×População original	164 026 364	166 044 754	168 063 144	4 036 780	2,43%
5×População original	411 920 531	415 111 886	418 303 241	6 382 710	1,54%
10×População original	825 710 514	830 223 771	834 737 029	9 026 525	1,09%

Foram também calculados IC considerando outro género de rendas. Nas tabelas seguintes podemos encontrar IC para VARSP e VABT para várias rendas.

Tabela 8.9 - Intervalos de confiança para o VARSP considerando outras rendas

	LI	VARSP	LS
Renda antecipada de termos constantes	76 158 414€	77 423 991€	78 689 568€
Renda postecipada de termos constantes	70 604 063€	71 869 640€	73 135 217€
Renda postecipada de termos em progressão geométrica	75 474 749€	76 891 342€	78 307 934€

Tabela 8.10 - Intervalos de confiança para o VABT considerando outras rendas

	LI	VABT	LS
Renda antecipada de termos constantes	148 700 968€	150 748 208€	152 795 447€
Renda postecipada de termos constantes	137 886 382€	139 933 622€	141 980 862€
Renda antecipada de termos em progressão geométrica	159 339 818€	161 648 533€	163 957 248€
Renda postecipada de termos em progressão geométrica	147 419 586€	149 711 114€	152 002 642€

8.4.4 Nível de financiamento do fundo

Em resumo, para o valor atuarial das pensões em pagamento obtiveram-se os seguintes valores

Tabela 8.11 - Estimativa pontual e limites do IC a 95% para o VAPP

LI	VAPP	LS
181 291 273€	187 517 616€	193 743 959€

e para o valor atuarial das responsabilidades com serviços passados teve-se:

Tabela 8.12 - Estimativa pontual e limites do IC a 95% para o VARSP

LI	VARSP	LS
81 595 160€	83 022 377€	84 449 594€

Considere-se que valor do fundo associado a este plano de pensões à data da avaliação é de 275 000 000€.

Considere-se o melhor caso das responsabilidades, isto é, o limite inferior dos intervalos de confiança. Assim, o nível de financiamento do fundo calculado com estas responsabilidades será

$$R = \frac{(F - VAPP)}{VARSP} = \frac{275\ 000\ 000 - 181\ 291\ 273}{81\ 595\ 160} = 1{,}15$$

portanto, considerando o melhor caso, o fundo encontra-se sobrefinanciado.

Procedendo de igual forma obtêm-se os níveis de financiamento para os outros casos, apresentados no quadro em seguida.

Tabela 8.13 - Nível de financiamento para diferentes casos

	Best Case (LI)	Average Case (VARSP)	Worst Case (LS)
R	1,15	1,05	0,96

Em conclusão verifica-se que para o *best case* e *average case* o fundo encontra-se sobrefinanciado. Considerando o pior cenário o fundo encontra-se subfinanciado, mas próximo do atuarial adequado.

9 Conclusão

Com o avançar dos tempos têm-se registado melhorias nas condições de vida da população, e os avanços na medicina permitiram o aumento da longevidade do ser humano. Portugal caracteriza-se, neste momento, por um aumento progressivo e acentuado da população adulta e idosa. Este fenómeno, associado ao baixo índice de natalidade, tem levado a que o sistema público de previdência de pensões, pela forma como é financiado, tenha entrado em declínio.

Neste sentido, os sistemas de pensões privados têm assumido um papel cada vez mais importante no nosso quotidiano, pelo que é exigido cada vez mais modelos elevados para a sua gestão e supervisão. É, acima de tudo, necessário garantir a constituição de um nível adequado de provisões que garanta o equilíbrio financeiro e a cobertura dos riscos assumidos.

Na sua essência, esta dissertação estabelece mais um conjunto de indicadores que contribuem para uma análise mais criteriosa da avaliação das responsabilidades, custo normal ou até mesmo no valor atuarial dos benefícios totais. Em suma, com as metodologias desenvolvidas será possível estabelecer intervalos de confiança para todos os cálculos que envolvam rendas vitalícias. Se um atuário, para além da estimação pontual do valor das responsabilidades atuariais, conseguir ter também informação relativamente à precisão dessa estimativa, poderá então fazer uma supervisão mais proactiva do fundo de pensões.

Foi considerada uma aplicação prática de forma a aplicar as metodologias desenvolvidas no decorrer deste trabalho. Considerou-se uma população real à qual se associou um plano de pensões fictício de benefício definido. Os resultados apresentados não poderão ser extrapolados para a generalidade dos casos, pois dependem das especificidades da população e do plano de pensões considerado. O plano em questão admitia apenas o benefício de reforma para o próprio membro, isto é, não admitia reversibilidade dos benefícios, nem quaisquer outros tipos de benefícios usuais em planos de pensões como, invalidez e direitos adquiridos.

Deve-se salientar que o estudo que foi efetuado é, de certa forma, introdutório e que existe ainda um longo caminho a percorrer no sentido de o complementar. Assim, espera-se que tenha sido despertada a vontade de aprofundar estas metodologias e, a diversidade de futuros desenvolvimentos é ainda extensa. Destacam-se os seguintes:

- estimação de intervalos de confiança para rendas vitalícias fracionadas;

- estimação de intervalos de confiança para rendas de duas cabeças, considerando todos os géneros de pagamento;

- estimação de intervalos de confiança considerando diferentes idades de reforma;

- estimação de intervalos de confiança considerando outros benefícios (invalidez, direitos adquiridos, …).

Pode-se também ainda proceder à projeção das responsabilidades até ao término de um fundo de pensões, isto considerando que o plano de pensões associado já não está aberto a novas entradas, e aplicando os intervalos de confiança às responsabilidades, conseguir obter uma estimativa da data mais cedo e mais tarde do termo do fundo de pensões.

Bibliografia

Afonso, L. e Cardoso, R. Notas da Disciplina Actuariado Vida, Mestrado em Matemática e Aplicações. Faculdade de Ciências e Tecnologia – UNL, 2013.

Afonso, L. Notas da Disciplina Segurança Social e Fundos de Pensões, Mestrado em Matemática e Aplicações. Faculdade de Ciências e Tecnologia – UNL, 2013.

Billingsley, P. "Probability and Measure", 3rd ed., New York, John Wiley & Sons, 1995

Bowers, N.L., Gerber, H.U. et al. "Actuarial Mathematics", The society of actuaries, 1997

Dickson, D.; Hardy, M.; Waters,H. "Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks", Cambridge University Press, Institute and Faculty of Actuaries, 2nd ed., 2013

Fischer, H. "A History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory", Springer, 2010

Garcia, J. "Introdução à Matemática Actuarial", Abril 2007

Gerber, H.U. "Life Insurance Mathematics", 3rd edition, Springer, 1997

Magalhães, M. N. "Probabilidade e Variáveis Aleatórias", 2ª edição, São Paulo, Edusp, 2006

Quelhas, A. P. "Seguros de Vida e Fundos de Pensões", Coimbra, Edições Almedina, 2010